BESTIMMUNG

DER

ELASTICITÄTSCOEFFICIENTEN

DES

BARYT.

INAUGURAL-DISSERTATION

BEHUFS ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

EINER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN

VORGELEGT VON

HANS NIEDMANN
AUS MÜNCHEN.

JULI 1887.

LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548321_0086

Die experimentellen Untersuchungen, welche bis heute über die Elasticitätsverhältnisse heterotrop-homogener Körper angestellt sind, führen zu dem Schlusse, dass auch der Widerstand, welchen die Moleküle eines Krystalles einer Veränderung ihres Abstandes entgegensetzen, sich dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie unterordnet, wonach:

»Jede geometrische Symmetrieebene des Krystalles zugleich Symmetrieebene desselben in physikalischer Beziehung ist.« Zwei gleich orientirte Richtungen haben also stets denselben Elasticitätscoëfficienten. Dagegen ändert sich mit der Richtung im Allgemeinen die Elasticität und zwar in verschiedenen Krystallen nach verschiedenen Gesetzen.

Eine Modification dieses letzten Satzes hat sich, wie nachher noch berührt werden soll, bei einzelnen Krystallsystemen ergeben, bei welchen, entsprechend der Neumann'schen Elasticitätstheorie, in Bezug auf Spannungsverhältnisse ein höherer Grad von Symmetrie herrscht, als dies in geometrischer Beziehung der Fall ist.

Nun ist allerdings die Zahl der Krystalle, die bis jetzt vollständig in der genannten Hinsicht geprüft sind, noch sehr gering und basiren besonders die Anschauungen über die Elasticität der optisch zweiaxigen Krystalle fast lediglich auf Analogieschlüssen mit den übrigen physikalischen Eigenschaften derselben.

Im Folgenden soll Aufklärung geschaffen werden über die Elasticitätsfläche eines Körpers aus dem rhombischen Systeme und ihre Beziehung zu seinen durch die Cohäsion bedingten Eigenschaften.

Im Zusammenhange damit dürfte es nicht ohne Interesse sein, in kurzer Uebersicht die »mechanischen« Eigenschaften derjenigen Körper etwas näher zu beleuchten, deren Elasticität schon Gegenstand des Studiums geworden ist*).

---

*) Summarisch findet sich diese Zusammenstellung bei Beckenkamp, Zeitschr. für Krystall. u. Min. **12**, 418.

Literatur.

F. Savart: Untersuchung über d. Elasticität der (regelmässig) krystallisirenden Körper. Pogg. Ann. 1829, **16**, 206.

A. J. Ångström: Ueber die Molekularconstanten der monoklinoëdrischen Krystalle Pogg. Ann. 1852, **86**, 206.

G. Baumgarten: Die Elasticität von Kalkspathstäbchen. Pogg. Ann. 1874, **152**, 369.

W. Voigt: Bestimmung der Elasticitätsconstanten der Steinsalzes. Pogg. Ann. 1876, Ergbd. **7**, 1 u. 177.

L. A. Coromilas: Ueber die Elasticitätsverhältnisse im Gyps und Glimmer. Inaug.-Dissert. Tüb. 1877.

P. Groth: Ueber die Elasticität des Steinsalzes. Monatsber. d. Berl. Akad. 1875, S. 544.

K. R. Koch: Ueber die Bestimmung des Elasticitätscoëfficienten aus der Biegung kurzer Stäbchen. Wiedemann Ann. d. Phys. 1878, **5**, 251.

J. Beckenkamp: Zur Bestimmung der Elasticität von Krystallen. Zeitschr. für Kryst. u. Min. 1885, **10**, 41.

W. Voigt: Neue Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Steinsalz und Flussspath. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1884, S. 989.

P. Groth: Ueber die Bestimmung der Elasticitätscoëfficenten der Krystalle. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Classe d. Münchn. Akad. 1884, S. 280.

H. Klang: Die Elasticitätscoëfficienten des Flussspaths. Wiedem. Ann. d. Phys. 1881, **12**, 321.

K. R. Koch: Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle des regulären Systems. Freibg. Berichte 1881 (2), **8**, 1—25.

H. Vater: Der Apparat von Warburg und Koch zur Bestimmung der Elasticitätscoëfficienten, sowie Anwendung desselben auf zur Axe senkrechte Platten von Kalkspath und Apatit. Zeitschr. für Krystall. u. Min. 1886, **11**, 549—586.

W. Voigt: Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Beryll und Bergkrystall. Festschrift. Göttingen 1886.

J. Beckenkamp: Die Elasticitätscoëfficienten des Chromalauns und des Eisenalauns. Zeitschr. für Krystall. u. Min. 1887, **12**, 418.

Mathematik: F. Neumann: Vorlesungen über Elasticität. Kirchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik, I. Mechanik. W. Voigt: Wiedem. Ann. d. Phys. 1882, **16**, 273. St. Venant: Mém. des Savants étrangers 1855, **14**, 370. H. Aron: Wiedem. Ann. 1883, **20**, 272. Minnigerode: Nachrichten der Göttinger Akad. 1884, S. 195.

Cohäsion: Frankenheim: De crystallorum cohaesione. Dissert. inaug. Vratislav. 1829. Deutsch in Baumgärtner und Ettingshausen's Zeitschr. f. Phys. u. Math. **9**. Wien 1831.

A. Seebeck: Ueber Härteprüfung von Krystallen. Progr. d. Berliner Realgymnasiums 1833.

R. Franz: Ueber die Härte der Mineralien. Pogg. Ann. 1850, **80**, 37.

Grailich und Pekárek: Das Sklerometer etc. Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1854, **13**, 410.

F. Exner: Untersuchungen über die Härte an Krystallflächen. Gekrönte Preisschrift. Wien 1873.

Pfaff: Untersuchungen über die absolute Härte des Kalkspaths und Gypses und das Wesen der Härte. Sitz.-Ber. der math.-phys. Classe d. Münchn. Akad. 1883, S. 372, und »das Mesosklerometer, ein Instrument zur Bestimmung der mittleren Härte der Krystallflächen«, ebenda 1884, S. 255.

L. Sohncke: Ueber die Cohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen Richtungen. Pogg. Ann. 1869, **137**, 177.

E. Reusch: Ueber eine besondere Gattung von Durchgängen im Steinsalz und Kalkspath. Pogg. Ann. 1867, **132**, 441; — am zweiaxigen Glimmer. Pogg. Ann. **136**, 430; — am krystallisirten Gyps, ibid. 1868, 135.

O Mügge: Beiträge zur Kenntniss der Structurflächen des Kalkspaths etc. N. Jahrb. f. Min. 1883, **1**, 32; Structurflächen am Kalkspath, ebenda 81; ferner Gleitflächen am Gyps, ebenda 1883, **2**, 13.

Bauer: Structurflächen am Gyps. Zeitschr. d. d. geol. Ges. **26**, 137. Tschermak: ebenso. Zeitschr. für Krystall. u. Min. **2**, 14.

P. Groth: Physikalische Krystallographie, 2. Aufl. 1885.

L. Sohncke: Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur 1879, und »Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie aus der Theorie der Krystallstructur«. Wiedem. Ann. 1882, **16**, 489.

Huyghens: Traité de la lumière. Leyde 1690. 4. S. 92—96.

Im Nachfolgenden möchte ich mich auf diese Literaturübersicht beziehen und werde, falls von einem Autor mehrere Publicationen vorliegen, nur noch das Jahr der Veröffentlichung beifügen.

Zusammenstellung. 1. Reguläres System.

Das **Steinsalz** ist in jeder Beziehung am Eingehendsten untersucht. Durch Biegung prismatischer Stäbchen erhielt Voigt (1876) für den Elasticitätscoëfficienten:

parallel den drei Hauptaxen:	4103 und später (1884)	4186 kg,
normal zu {110}	3410 - -	3482 -
- - {111}	3193 kg.	

Daraus ergiebt sich das Verhältniss: $\frac{E \perp \{100\}}{E \perp \{110\}} = 1{,}20$ und $\frac{E \perp \{100\}}{E \perp \{110\}} = 1{,}07$. Nach demselben Princip fand Koch (1878) folgende Werthe:

$$E \perp \{100\} = 4030 \qquad E \perp \{110\} = 3395 \qquad \text{also } \frac{E \perp \{100\}}{E \perp \{110\}} = 1{,}188.$$

Auf ganz abweichendem Wege wurde die Richtigkeit dieser Verhältnisszahlen bestätigt durch Groth (1875), der in den beiden in Frage stehenden Richtungen die Schallgeschwindigkeiten bestimmte, die ja bei gleicher Masse lediglich Functionen der Elasticitätscoëfficienten sind. Er erhielt als Mittel aus drei Versuchsreihen: $\frac{E \perp \{100\}}{E \perp \{110\}} = 1{,}19.$

In allen krystallographisch gleichwerthigen Richtungen ist beim Steinsalz der Elasticitätscoëfficient gleich gross.

Spaltbarkeit nach {100} vollkommen. Die Härtecurve ist nach Exner auf den Hexaëderflächen durch vier gleich grosse Maxima und vier unter sich ebenfalls gleich grosse Minima charakterisirt. Erstere liegen in den Diagonalen und verhalten sich zu den ∥ den Hexaëderkanten liegenden Minimis wie 1,3 : 1.

Die Zugfestigkeit in verschiedenen Richtungen wurde durch Sohncke (1869) gemessen. Die Zerreissung von Prismen, die in irgendwelcher Richtung aus dem Steinsalzkrystall geschnitten waren, erfolgte immer nur nach Würfelflächen. Liegt die Längsaxe des Prismas ⊥ zum Hexaëder, so ist auf 1 qmm Querschnitt die Cohäsion $C = 35$ [Loth]; $\perp\{110\}$ $C > 80{,}7$, wahrscheinlich $= 86{,}5$; $C_{\perp\{111\}} > 105$ [Loth].

Gleitflächen sind nach Reusch (1867) die sechs Dodekaëderflächen, sie können sowohl durch Pressung, als durch die Körnerprobe erhalten werden. Bei letzterer stellt die Schlagfigur auf den Würfelflächen ein rechtwinkliges Kreuz dar, dessen Radien den Diagonalen ∥ laufen. In den Dodekaëderflächen selbst erfolgt eine Verschiebung der Moleküle mit besonderer Leichtigkeit in der Richtung der grossen Diagonale.

Sylvin. Die Elasticitätscoëfficienten sind nach Koch (1881):

in der Richtung der drei Hauptaxen $= 4010$ kg
normal zu {110} $= 2088$ - also $\frac{E_{\perp\{100\}}}{E_{\perp\{110\}}} = 1{,}92.$

Spaltbarkeit vollkommen nach den Hexaëderflächen. Die Härtecurve liegt nach Exner auf den Hexaëderflächen genau analog wie beim Steinsalz, das Verhältniss von Maximum zu Minimum ist in diesem Falle $= 1{,}25 : 1$. Jedenfalls äussern sich auch die übrigen Cohäsionserscheinungen wie beim Steinsalz.

Flussspath wurde bezüglich seiner Elasticität zuerst von Klang, später noch genauer von Voigt (1884) untersucht. Nach letzterem ist E:

in der Richtung der drei Hauptaxen $= 13940$ kg
normal zu {110} $= 9528$ - also $\frac{E_{\perp\{100\}}}{E_{\perp\{110\}}} = 1{,}46.$

Spaltbarkeit vollkommen nach den Oktaëderflächen. Die Härtecurve zeigt wie beim Steinsalz vier gleich grosse Maxima und vier unter einander ebenfalls gleiche Minima, doch erscheint die Curve um 45° gedreht. Verhältniss des Maximums (∥ den Kanten) zum Minimum (∥ den Diagonalen) $= 1{,}6 : 1$ (Exner), nach Franz $= 33{,}0 : 24{,}3$.

Für **chlorsaures Natron** giebt Koch (1881) folgende Elasticitätscoëfficienten an:

in der Richtung der drei Hauptaxen = 4047 kg
normal zu {110} = 3190 - also $\frac{E_{\perp\{100\}}}{E_{\perp\{110\}}} = 1{,}27.$

Die Cohäsion ist nach verschiedenen Richtungen so wenig verschieden, dass keine Spaltbarkeit zu beobachten ist, und die Härtecurve auf den Hexaëderflächen fast als Kreis erscheint.

Alaune. Beckenkamp (1884 und 1886) stellte Untersuchungen über die Elasticitätsverhältnisse dreier Alaune (Kalium-, Chrom- und Eisenalaun) an und fand die Coëfficienten:

	für Kaliumalaun:	für Chromalaun:	für Eisenalaun:
in der Richtung der drei Hauptaxen	= 1806 kg	= 1608 kg	—
normal zu {110}	= 1987 -	= 1771 -	= 1861 kg
normal zu {111}	—	= 1832 -	—
also: $\frac{E_{\perp\{100\}}}{E_{\perp\{110\}}}$	= 0,90	= 0,90	

Spaltbarkeit der Alaune unvollkommen nach dem Oktaëder. Da Exner für die Oktaëderfläche des Alauns die analoge Härtecurve wie beim Flussspath auf derselben Fläche fand, so ist bei den ähnlichen Spaltungsverhältnissen beider Körper anzunehmen, dass die nicht untersuchte Würfelfläche des Alauns Maxima und Minima, wenn auch mit geringeren Grössenunterschieden, in derselben Orientirung zeigt, wie die oben bei jenem Körper angedeutete Curve.

2. Hexagonales System.

Beryll. Die Untersuchungen Voigt's zeigen, dass der Elasticitätscoëfficient gleich ist in allen Richtungen, welche dieselbe Neigung zur Hauptaxe besitzen, also auch gleich für sämmtliche Radien der Hauptsymmetrieebene. Es war dies für holoëdrisch-hexagonale Körper entsprechend der Neumann'schen Elasticitätstheorie schon verschiedentlich mathematisch ausgeführt (Voigt, Aron, Minnigerode etc.). Der absolute Werth der Coëfficienten ist nach Voigt (1886):

in der Richtung der Hauptaxe	E_0	= 21 650 kg
in den Richtungen zur -	$E_{\pm 45}$	= 17 960 -
parallel der Hauptsymmetrieebene	E_{90}	= 23 120 -

Spaltbarkeit nach der Endfläche deutlich.

Am **Kalkspath** wurden die ersten genauen Messungen über Elasticität von Krystallen angestellt durch Baumgarten. Derselbe bestimmte die Biegungen von Stäbchen, deren Längsrichtungen parallel dem Hauptschnitte des Rhomboëders $\{11\bar{2}0\}$ und unter $22\frac{1}{2}^0$ gegen einander geneigt

waren. Die erhaltene Curve, deren Radien den elastischen Biegungen der entsprechenden Stäbchen proportional sind, zeigt in diesem Hauptschnitte eine Aenderung der Elasticität mit der Richtung, und zwar liegt das Minimum der Elasticität (also Maximum der Biegung) parallel der kurzen Diagonale der Rhomboëderfläche, das Maximum parallel der Rhomboëderkante. Die Curve ist nicht symmetrisch nach der Basis und der zum Hauptschnitte senkrechten Prismenfläche erster Ordnung, entsprechend der fehlenden geometrischen Symmetrie nach dieser Ebene. Die Coëfficienten berechnen sich nach Beckenkamp (1887) aus diesen Messungen, wie folgt:

E_0 (Richtung der Hauptaxe)	= 5010 kg
E_{+45} (45° gegen die Hauptaxe, aus den positiven Rhomboëderflächen austretend)	= 7720 -
E_{-45} (45° gegen die Hauptaxe, aus den Polkanten von $+R$ austretend)	= 4411 -
E_{90} (senkrecht zur Hauptaxe)	= 7904*)-

Ferner wurde durch Vater constatirt, dass die Biegungscurve auf der Basis ein Kreis, die Elasticität also in jeder Richtung parallel dieser Ebene gleich gross ist. Als absoluten Werth für E_{90} erhielt er 4840. Bei steigender Belastung steigt E bis 7500 kg.

Spaltbarkeit sehr vollkommen nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$. Die Härtecurve zeigt nach Pfaff (1883), Grailich und Pekárek auf der geraden Endfläche drei ausgezeichnete Werthe in der Richtung der Winkelhalbirenden, drei Richtungen von mittleren Werthen parallel den Dreieckseiten. Auf der Rhomboëderfläche (R) fand Pfaff das Maximum der Härte in der Richtung vom Poleck abwärts || der Kante, einen mittleren Werth in der Poldiagonale abwärts, das Minimum in der Poldiagonale aufwärts. Und zwar sind die Unterschiede sehr bedeutend: $\frac{\text{Max.}}{\text{Min.}} = \frac{34{,}3}{0{,}65}$.

Als Gleitflächen wurden schon von Huyghens die Flächen von $\varkappa\{01\bar{1}2\}—\frac{1}{2}R$ erkannt; Reusch bestätigte die Beobachtung und Mügge (1883) führt an, dass man ein Gleiten nach dieser Fläche auch dadurch hervorbringen könne, dass man den Krystall zwischen zwei parallele Randkanten einspannt und senkrecht zur Hauptaxe presst. Beim Pressen zwischen zwei || Polkanten beobachtete Mügge noch eine »Reissfläche«: $\{11\bar{2}0\}\infty P2$, also die Fläche des Hauptschnittes.

Der Quarz zeigt interessante Verhältnisse. Bereits Savart zeigte, dass die elastischen Schwingungen, in die er kreisförmig aus diesem Mate-

*) Der bei Beckenkamp angegebene Werth 4904 beruht jedenfalls auf einem Druckfehler.

rial geschnittene Scheiben versetzte, auf denselben Klangfiguren von rhomboëdrischer Unsymmetrie erzeugten. Durch höchst sorgfältige Messungen mit verschieden orientirten Quarzstäbchen bestimmte neuerdings Voigt (1886) die einzelnen Constanten. Die Biegungscurve auf der Basis ist ein Kreis, diejenige im geometrischen Hauptschnitte zeigt, ähnlich dem Kalkspath, Aenderung der Elasticität mit der Richtung, das Minimum der Elasticität liegt unter $-48^0\,15'$ (aus der Polkante von $+R$ austretend), das Maximum unter $+71^0$ (aus der positiven Rhomboëderfläche austretend) zur Verticalaxe geneigt. Die gefundenen Coëfficienten sind:

E_0 (Richtung der Verticalaxe)	=	10304 kg
E_{-45}	=	13050 -
E_{+45}	=	8505 -
E_{90}	=	7853 -

Spaltbarkeit nach $\varkappa\{10\bar{1}1\}R$, $\varkappa\{01\bar{1}1\}-R$ und $\{10\bar{1}0\}\infty R$ sehr unvollkommen. Nach Franz liegt beim Quarz die geringste Härte in der Richtung der verticalen Axe, die grösste (fast doppelte) senkrecht dazu.

3. Monosymmetrisches System.

Vom monosymmetrischen System sind nur die Spaltungsflächen von Gyps und Glimmer auf ihre Elasticitätsverhältnisse untersucht (Coromilas). Beim Gyps liegt in dieser Ebene, die zugleich Symmetrieebene ist, das Maximum der Elasticität im stumpfen Axenwinkel, mit der Axe a einen Winkel von $75{,}4^0$ bildend, das Minimum im spitzen Axenwinkel und schliesst mit a einen Winkel von $21{,}9^0$ ein. $E_{\text{max.}} = 8870$,
$E_{\text{min.}} = 3130$.

Die Härte und sonstigen mit der Cohäsion in Zusammenhang stehenden Eigenschaften sind zwar eingehender untersucht, lassen aber keine interessanten Beziehungen mit der Elasticität erkennen.

Dasselbe ist beim Glimmer der Fall. Das Minimum der Elasticität in der Spaltungsebene fällt mit der Symmetrieaxe zusammen, das Maximum bildet mit ihr 45^0. Coromilas giebt an $E_{\text{max.}}$ 22 133,
$E_{\text{min.}}$ 15 543.
Die Zuverlässigkeit dieser letzteren Zahlen zweifelt Beckenkamp mit Recht an.

Ueberblicken wir diese Reihe von Thatsachen, so zeigt sich, dass eine allgemein giltige gesetzmässige Beziehung zwischen der Elasticität und den Cohäsionsverhältnissen sich nicht aufstellen lässt. Krystalle, die fast gar keine Unterschiede in der Cohäsion zeigen, können sehr bedeutende Unterschiede der Elasticität aufweisen, wie z. B. der Quarz und auch das chlor-

saure Natron. Während andererseits die Alaune z. B. wohl Spaltbarkeit aufweisen, aber nur geringe Unterschiede der Elasticität. Die Richtung der Maxima und Minima der Elasticität ändert sich nicht immer mit der Richtung der Spaltungsflächen. So zeigt der Flussspath oktaëdrische, das Steinsalz hexaëdrische Spaltbarkeit, und doch ist bei beiden die Richtung der Maxima und Minima die gleiche. Schon daraus ist ersichtlich, dass die Beziehungen zwischen Elasticität und Cohäsion äusserst complicirte sind, über die wohl erst ein tieferes Studium der Molekularstructur der Krystalle Aufschluss geben dürfte.

Der Apparat von Warburg und Koch.

Zur Ausführung der Bestimmungen bediente ich mich desselben Apparates, der von Vater benutzt wurde und dessen ausführliche Beschreibung incl. Correcturen und Messungsmethode sich in der citirten Arbeit vorfindet. Die Correcturen, welche durch den mangelhaften Parallelismus der Lagerkanten mit der Schiene *V* bedingt wurden, erwiesen sich, infolge der inzwischen vorgenommenen Revision des Apparates, als sehr gering und ebenso erfolgte, bei horizontaler Stellung des Mikroskops, die Bewegung des letzteren durch die Mikrometerschraube *u* mit genügender Genauigkeit in der durch die beiden Lagerkanten festgelegten Ebene. Der ganze Apparat wurde in seiner ihm durch Groth, Beckenkamp und Vater gegebenen Form wiederholt als durchaus zweckmässig und bequem befunden. Nur zwei ganz unwesentliche Aenderungen resp. Zugaben glaubte ich anbringen zu dürfen. Die erste betrifft die Regulirung der Länge des Seidenfadens, an dem der untere Theil der Belastung hängt. Befestigt man das Häkchen, welches den Seidenfaden trägt, nicht direct mittels Gewinde in den Querriegel des oberen Belastungsrechtecks, sondern lässt es lose durch denselben gehen und verlängert es um ca. 2 cm, so erlaubt eine über dem Riegel angebrachte Schraubenmutter eine schnellere und genauere Regulirung, als sie durch den Knoten am Seidenfaden möglich war.

Die zweite Modificirung findet sich eigentlich schon an dem ursprünglichen Apparate, wie er von Baumgarten benutzt wurde, lässt sich aber neuerdings an der Vater'schen Belastungsvorrichtung noch bequemer anbringen. Findet man beim Auflegen der Platte resp. des Stäbchens die Stellung derselben noch mit einem Fehler behaftet, so ist es nicht möglich, denselben zu eliminiren, während man zugleich durch das Mikroskop die Veränderung beobachtet; ausserdem geschieht es bei geringem Tatonniren leicht, dass der Fehler in den entgegengesetzten verwandelt, d. h. die Platte zu weit geschoben wird. Dem lässt sich abhelfen durch zwei zu den Lagerkanten parallele Schrauben, die mit 8 mm Entfernung von einander hinter dem Prisma in mittlerer Höhe der Krystallplatte stehen, und so geeignet

sind, der letzteren nach rückwärts als Widerlager zu dienen. Man legt die Platte absichtlich etwas zu weit nach hinten und schiebt dann mit Hülfe der Schrauben direct in die richtige Lage, während man durch das Mikroskop beobachtet. Gehalten werden die Schrauben s_1 und s_2 (s. Fig. 6) durch den Arm a. Der Ring r passt genau auf den cylindrischen Theil, mit welchem das dreikantige Prisma δ*) auf dem Schlitten σ aufsitzt. Die Schraube f bewegt sich beim Drehen des Armes im Schlitz S (Länge desselben $\frac{\pi}{2}$) und verhindert ein zu weites Vorstossen der Schrauben. Während der Beobachtung der Biegung dürfen selbstverständlich die Schräubchen die Platte nicht berühren.

Die Belastung geschah bei vorliegenden Messungen lediglich mit der Spitze, da dieselbe ein viel genaueres Einstellen des »Belastungspunktes« auf die Mitte der Platten gestattet, als die Schneide.

Bei der Einstellung des horizontal gelegten Mikroskops auf den »Belastungspunkt« ist darauf zu achten, dass schon vorher dem Prisma die Stellung gegeben werde, in der die Interferenzstreifen deutlich beobachtet werden können, ohne die Biegung der Platte zu hindern, weil durch nachträgliches Auf- oder Abbewegen des Prismas v_{11} wesentlich verändert wird. Ein solcher Fehler eliminirt sich allerdings, wenn man, was nie versäumt werden sollte, sich nach Angabe Koch's (1878) durch einseitigen Druck auf die bewegliche Lagerkante vor Zählung der Interferenzstreifen versichert, dass die sich ausschliesslich vertical abwärts bewegende Stelle im Fadenkreuz liegt. Es ist derjenige Punkt, wo bei leichtem, einseitigem Druck auf L keine Drehung der Streifen stattfindet.]

Eine grosse Unbequemlichkeit bei Beobachtung der Biegung, die Beckenkamp in seiner letzten Arbeit (1887) erwähnt und die darin besteht, dass beim Belasten ein bis zwei überzählige Streifen das Fadenkreuz passiren, die aber »gewöhnlich kurz nach völliger Auslösung der Arretirung von selbst wieder zurückspringen«, kann man sich dadurch ersparen, dass die Arretirungsplatte sowohl, als der mit ihr in Berührung kommende Theil der unteren Belastung stets recht sauber gehalten wird, weil sonst die Adhäsion der genannten Platte an die aufliegenden Belastungstheile »erst kurz nach völliger Auslösung« der Arretirung überwunden wird, und das Zurückspringen der Streifen die Sicherheit des Zählens sehr beeinträchtigt.

Für die Grösse der Herabbiegung der Lagerkanten wurde der von Vater gefundene Durchschnittswerth: 2,24 halbe Wellenlängen auf 1 kg Belastung in Rechnung gezogen.

Um den Biegungsrückstand zu eliminiren, wurde bei jeder Messung

*) Siehe die Figurentafel bei Vater, der die Buchstabenbezeichnungen entlehnt sind.

die Platte zuerst einer höheren Belastung ausgesetzt, als diejenige war, bei der die Beobachtung vorgenommen werden sollte.

Die Temperatur schwankte bei den Beobachtungen zwischen 15° und 18° C.

Untersuchungsmaterial und Behandlung desselben.

Unter den rhombisch krystallisirenden Körpern bietet wohl der Baryt ($BaSO_4$) das geeignetste Material zur Erforschung der Elasticitätsverhältnisse; zuvörderst, weil er so interessante Cohäsionsverhältnisse zeigt, wie kaum ein anderes Mineral, dann aber, weil er in grossen, klaren Krystallen vorkommt. Mein Material verdanke ich der Güte des Herrn Professor Groth.

Der Plan für die Arbeit war folgender: Es sollten parallel den drei Symmetrieebenen kreisrunde Platten aus den Krystallen geschnitten und ihre Biegung in möglichst vielen Stellungen gemessen werden. Zur Bestimmung der absoluten Werthe der Elasticitätscoëfficienten sollten drei Stäbchen dienen, deren Längsrichtung je einer der drei geometrischen Symmetrieaxen parallel lief, welche zuletzt erhaltenen Werthe dann auch gestatteten zu controliren, ob die Untersuchung der kreisförmigen Platten Verschiedenheiten der Elasticität deutlich zur Wahrnehmung gelangen lässt.

Die Methode der Untersuchung kreisförmiger Platten wurde von Groth (1884) angeregt, Beckenkamp kam damit, infolge der ungünstigen Eigenschaften seines Materials, des Alauns, zu keinem Resultate. Vater, der eine Flussspathplatte in zwei verschiedenen Richtungen bog, erhielt geringere Elasticitätsunterschiede als Voigt (1884) in denselben Richtungen mittelst Stäbchen, nämlich: $\frac{E_{\perp\{100\}}}{E_{\perp\{110\}}} = 1{,}19$ (Vater) und $= 1{,}45$ (Voigt). Das dürfte aber durchaus nicht entscheidend sein, und so wurde die Methode wieder aufgenommen.

Die Platten und Stäbchen konnten leider nicht alle aus einem Stück gewonnen werden, und zwar wurden geschnitten:

aus Krystall I. die kreisförmige Platte A ∥ dem Makropinakoid {100},
- - - A_1 ∥ - - {100},
- - - C ∥ der Basis {001} [Ebene der grössten Spaltbarkeit],
ferner das Stäbchen a Längsrichtung ∥ der Brachydiagonale,
- - b - ∥ der Makrodiagonale,

aus Krystall II. die kreisförmige Platte B ∥ dem Brachypinakoid {010},
das Stäbchen b_1 ∥ der Makrodiagonale [als Controle],
- - ∥ - Verticalaxe c.

Die Anfertigung derselben wurde von Herren Dr. Steeg und Reuter, Homburg v. d. Höhe, übernommen und nach manchem Unglücksfall gut ausgeführt. Stäbchen wie Platten waren genau eben und gut polirt, letztere mit Ausnahme unbedeutender Fehler vollkommen kreisrund.

Die Dimensionen wurden theils mit freundlicher Erlaubniss des Herrn Professor Dr. Bauschinger an dessen höchst empfindlichem Clebe'schen Dickenmesser *), theils mit Hülfe der Mikrometerschrauben u und v meines Apparates gemessen.

Die Dicke der Stäbchen gelangte an acht, die der Platten an siebzehn Punkten zur Messung. Erstere waren in zwei Parallelreihen der Länge und in vier Reihen der Breite der Stäbchen nach vertheilt; letztere siebzehn Punkte waren die Mittelpunkte und je acht auf zwei concentrischen Kreisen gleichmässig vertheilte Stellen der kreisförmigen Platten. Als Breite der Stäbchen wurde das Mittel der Ausmessungen von sechs zwischen den Lagerkanten gleichvertheilten Stellen genommen, bei den Scheiben das Mittel von acht Durchmessern.

Die genaue Orientirung ist in den Symmetrieebenen bei rhombischen Krystallen einfach; an den Enden der Stäbchen fanden sich in allen Fällen Spaltungsebenen, die mit Hülfe des Goniometers erlaubten, die Lage der Längsrichtung gegen die Symmetrieaxen genau zu fixiren. Stäbchen wie Scheiben waren gut, theilweise sehr gut orientirt, die Neigung gegen die vorgeschriebene Richtung betrug nicht über 40′, nur das Stäbchen a war in der Ebene der Basis um 4,5° gedreht, doch liess sich hier eine Correctur leicht anbringen.

Das Auflegen und die Einstellung geschah in der von Vater beschriebenen Weise. Nach Maassgabe der optischen Orientirung waren bei den Platten die Anfangsrichtungen der Biegung durch feine, am Rande angebrachte Striche die Endpunkte der betreffenden Durchmesser bezeichnet. Nach ihnen geschah in bekannter Weise auch die Bestimmung der Richtung vor Beobachtung jeder Biegung durch den beweglichen Arm des Fadenkreuzes und die damit in Verbindung stehende Gradtheilung am oberen Ende des Mikroskops. Die Einstellung der Kreisplatten für die folgende Biegungsrichtung wird bei Anwendung der Belastungsspitze dadurch sehr erleichtert, dass beim Heben der letzteren mittels der zugehörigen Vorrichtung die leichte Krystallplatte vermöge der Adhäsion des zum Schutz zwischengelegten Gummiblättchens einen Moment mitgehoben wird, welche Zeit man dazu benutzt, das Belastungsrechteck **), incl. Spitze und Platte ungefähr um den gewünschten Winkel zu drehen. Im nächsten Augenblick

*) C. Clebe: Ueber einen neuen Dickenmesser. Bayr. Industrie- u. Gewerbebl. 1882, Heft 1.

**) Vater, Fig. 3, I.

lässt die Platte los und erweist sich bei der Controle in den meisten Fällen schon als centrirt, vorausgesetzt, dass die Stellung der Spitze die richtige war. Stäbchen und Platten wurden auf beiden Flächen belastet.

Zur Berechnung diente mir für die Elasticitätscoëfficienten in der Längsrichtung der Stäbchen die Warburg'sche*), für die zu den Lagerkanten senkrechte Richtung der Kreisplatten die Beckenkamp'sche**) Formel. Letztere kann allerdings wegen der complicirten Beziehungen, die zwischen der Biegung und dem Werthe von E bestehen, erfahrungsgemäss nicht einmal einen Annäherungswerth liefern, indessen wollte ich doch in einzelnen Fällen beobachten, wie gross die Differenz des auf diese Weise gefundenen Werthes vom wirklichen sei. Es ist also: für Stäbchen:

$$E = \frac{P}{n\lambda} \cdot \frac{l^3}{b h^3} \left\{ 4 + 3 \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right\}$$

und für kreisförmige Platten:

$$E' = \frac{6P}{n\lambda h^3} \left\{ \left(l^2 + \frac{r^2}{2} \right) \arcsin \frac{l}{r} + \frac{3}{2} l \sqrt{r^2 - l^2} - 2rl \right\},$$

wenn P das belastende Gewicht in kg,

b die Breite des Stäbchens
r den Radius der Platte
h die Dicke des Stäbchens resp. der Platte
l den halben Abstand der Lager

} gemessen in mm,

n die Anzahl der bei der Biegung durch's Fadenkreuz gegangenen Interferenzstreifen n_1 vermindert um die vom Herabbiegen der Lagerkanten herrührenden Streifen n_2,

λ die Wellenlänge***) des angewendeten homogenen Lichtes bedeutet.

Ferner sei im Folgenden noch:

$N = n_1$ reducirt auf ein Kilogramm.

Um ein Beispiel der Genauigkeitsgrenzen der Messungen zu geben, sind bei der Platte A die Dimensionsbestimmungen, sowie die beste und die wenigst gute Beobachtung der Biegung detaillirt angegeben, später folgen nur die Durchschnittswerthe. Die Biegungsresultate sind in der Weise vorgeführt, dass die erste Columne die Richtung der Biegung, d. h. den Winkel bezeichnet, welchen der zu den Lagerkanten senkrechte Durchmesser mit einem als »Anfangsrichtung« bezeichneten einschliesst, die zwei folgenden Columnen zeigen die Zahl der Interferenzstreifen an, welche bei

*) Koch 1878.

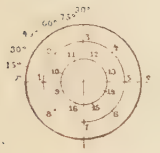
**) 1885.

***) λ nach Ditscheiner für Natriumlicht = 0,0005894 mm.

den in der ersten Reihe vermerkten Belastungen das Fadenkreuz passirten. Columne IV bringt dieselben Zahlen auf 1 kg Belastung reducirt, und Columne V giebt die Durchschnittszahlen von Columne IV für jede einzelne Richtung.

Messungen an der Platte *A*. Makropinakoid.

1. Dimensionen. *α*. Dickenmessung.



Punkt 1.	0,4801			P. 2.	0,4814			
	0,4806				0,4811			
	0,4805	0,4805			0,4810	0,4811		
	0,4806				0,4810			
	0,4806				0,4811			
P. 3.	0,4816		P. 4.	0,4760		P. 5.	0,4753	
	0,4813			0,4759			0,4754	
	0,4810	0,4813		0,4757	0,4759		0,4753	0,4753
	0,4813			0,4760			0,4751	
	0,4812			0,4757			0,4753	
P. 6.	0,4747		P. 7.	0,4758		P. 8.	0,4764	
	0,4748			0,4756			0,4763	
	0,4746	0,4746		0,4759	0,4758		0,4763	0,4764
	0,4746			0,4760			0,4764	
	0,4744			0,4776			0,4766	
P. 9.	0,4800		P. 10.	0,4773		P. 11.	0,4780	
	0,4800			0,4777			0,4780	
	0,4800	0,4800		0,4775	0,4775		0,4779	0,4780
	0,4800			0,4775			0,4780	
	0,4801			0,4776			0,4780	
P. 12.	0,4794		P. 13.	0,4771		P. 14.	0,4765	
	0,4793			0,4764			0,4764	
	0,4791	0,4793		0,4767	0,4767		0,4763	0,4763
	0,4796			0,4769			0,4762	
	0,4793			0,4763			0,4763	
P. 15.	0,4764		P. 16.	0,4766		Centrum	0,4776	
	0,4764			0,4765			0,4778	
	0,4762	0,4763		0,4766	0,4765		0,4775	0,4775
	0,4761			0,4765			0,4775	
	0,4762			0,4764			0,4772	

Mittlere Dicke: $= \frac{8,1200}{17}$ 0,4776 oder corrigirt: $h = 0,4753$ mm.

β. Durchmesser:

Durchm. in der Richtg.: rs	$= 15{,}1375$	zu rs unter 105^0 geneigt:	$15{,}140$
dazu unter 15^0 geneigt	$= 15{,}1340$	– 120^0 –	$15{,}1535$
– 30^0 –	$= 15{,}1290$	– 135^0 –	$15{,}1405$
– 45^0 –	$= 15{,}1350$	– 150^0 –	$15{,}1315$
– 60^0 –	$= 15{,}1420$	– 165^0 –	$15{,}142$
– 75^0 –	$= 15{,}1490$	– 180^0 –	$15{,}137$
– 90^0 –	$= 15{,}1492$		

$$\text{Mittlerer Durchmesser} = \frac{1{,}8202 + 13 \times 15}{13} = 15{,}1401 \text{ od. corrigirt}$$

$r = 7{,}5738$ mm.

2. Biegungen.

α. Beispiel bester und wenigst guter Uebereinstimmung der Messung.

		Belastg. = 0,1575 kg. Beispiel I.	Beispiel II.
Lage I. Bei verschied. Einstellungen	$n_1 =$	25,33 Streifen	35,81 Streifen
		25,32	35,51
		25,33	35,42
Lage II. – – –		25,34	35,44
		25,32	35,33
		25,31	35,23
Mittel	$n_1 =$	25,32	35,40

β. Zusammenhängende Darstellung der Biegungen, welche die Platte A in verschiedenen Richtungen erleidet.

$l = 6{,}015$ mm [halber Lagerabstand].

Anfangsrichtung der Biegung rs, Richtung der Makrodiagonale [d. h. rs der $\perp$ Lagerkante].

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,1575	n_1 bei P 0,1074 kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $N_2 = 2{,}24$, wenn die Biegg. ∥ der Verticalen = 1 ist
0^0	35,61	—	226,05	225,19	1,54
	—	24,10	224,34		
$+ 12{,}5^0$	36,16	—	229,54	229,55	
	—	24,84	229,56		
$+ 27{,}5^0$	39,66	—	251,76	252,10	
	—	27,12	252,44		
$+ 30^0$	40,08	—	—	—	

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,1575	0,1074 kg	N auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$ wenn die Biegg. ‖ der Verticalen = 1 ist
+ 33°	40,53	—	257,28	257,83	
	—	27,76	258,38		
+ 35°	40,74	—	—	—	
+ 37°	40,90	—	—	—	
+ 38°	40,97	—	260,65	261,00	1,78
	—	28,07	261,35		
+ 40°	40,66	—	—	—	
+ 42,5°	40,25	—	255,51	256,63	1,76
	—	27,69	257,75		
+ 45°	39,68	—	251,73	252,30	1,73
	—	27,16	252,86		
+ 47°	39,06	—	247,95	247,96	
	—	26,64	247,97		
+ 49°	38,55	—	244,72	243,69	
	—	26,07	242,67		
+ 57,5°	35,46	—	225,10	223,88	
	—	23,92	222,66		
+ 72,5°	26,96	—	171,14	172,13	
	—	18,60	173,13		
+ 90°	23,07	—	146,89	147,07	1
	—	15,82	147,26		
+ 94°	23,19	—	147,21	147,24	
	—	15,82	147,26		
+ 102,5°	25,33	—	160,80	160,82	
	—	17,58	160,84		
+ 117,5°	32,61	—	207,01	207,95	
	—	22,44	208,88		
+ 132,5°	39,23	—	249,03	249,29	
	—	26,81	249,56		
+ 142°	41,00	—	260,27	260,59	1,78
	—	28,03	260,91		
+ 147,5°	40,62	—	257,85	257,84	
	—	27,70	257,84		
+ 162,5°	37,58	—	238,56	239,03	
	—	25,73	239,50		
+ 180°	35,57	—	225,79	225,06	1,54
	—	24,10	224,33		

Die Platte A_1 (ebenfalls ‖ dem Makropinakoid) wurde nur in den von Platte A her bekannten Hauptrichtungen gebogen, um als Controle zu dienen. Es wurden zunächst die Dimensionen bestimmt:

Mittlere Dicke [von 17 Punkten] = *0,4539* mm = *h*,
mittlerer Durchmesser [8 Messungen] = 15,1307, also *r* = *7,5655* mm.

Die Anfangsrichtung der Biegung lag wieder || der Makrodiagonale. Im selben Sinne wie bei Platte *A* ist dann für *l* = *6,001* mm:

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei *P* = 0,1565	*N* [auf 1 kg reducirt]	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$, wenn die Biegung || der Verticalen = 1
0°	41,70	266,46	1,55
38°	47,84	305,68	1,788
45°	46,12	294,70	1,726
90°	26,88	171,76	1

Die Uebereinstimmung der Verhältnisszahlen ist somit eine genügende. Tragen wir nun die mit Platte *A* erhaltenen Biegungen, oder proportionale Grössen davon unter den zugehörigen Winkeln als Radien auf, so erhalten wir die unter Fig. 1 wiedergegebene Biegungscurve. Bei Betrachtung derselben fällt zunächst die Symmetrie, sowohl nach der Verticalaxe *c*, als nach der Makrodiagonale *b* auf. Die Curve zeigt vier Maxima und vier Minima, von denen je zwei in derselben Richtung liegen. Die vier Maxima, welche unter einem Winkel von 38° zur Makrodiagonale liegen, sind einander gleich; die Minima, in den Axen gelegen, bilden zwei ungleiche Paare, und zwar findet sich die bei weitem grösste Elasticität (also kleinste Biegung) in der Richtung der Verticalaxe, die kleinere in der Richtung der Makrodiagonale.

Selbstverständlich geben die in der letzten Columne angeführten Verhältnisszahlen die reciproken Werthe der Verhältnisszahlen der Elasticitätscoëfficienten, d. h. wenn z. B. die Biegung in der Richtung der Makrodiagonale 1,55 mal grösser ist, als in der Richtung der Verticalen, so zeigt andererseits die letztere Richtung einen Elasticitätscoëfficienten, der 1,55 mal so gross ist, als der der ersteren Richtung.

Messungen an der Platte *B*. Brachypinakoid.

1. Dimensionen. *α*. Dicke.

Als Mittel der an neun gleich vertheilten Punkten vorgenommenen Messungen ergab sich die mittlere Dicke *h* = *0,5181* mm.

β. Durchmesser.

Es wurden zwölf Durchmesser bestimmt, der grösste mass 12,653 mm, der kleinste 12,641 mm, der mittlere Radius ist: *r* = *6,5254* mm.

2. Biegungen.

Bei einem Lagerabstande von $l = 5{,}000$ mm wurden mit der Axe a (Brachydiagonale) als erster Biegungsrichtung folgende Zahlen erhalten:

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,1323kg	n_1 bei P = 0,1077kg	n_1 bei P = 0,0821kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth	Verhältnisszahl, Biegung in der Richtung der Verticalen = 1
0°	14,42			108,79		
	14,36	11,80		109,56	109,40	1,324
			9,00	109,86		
17°	14,00			105,57		
	13,95	11,45		106,31	106,55	
			8,85	107,78		
37,5°	13,25			100,20		
	13,26	10,79		100,19	100,69	
			8,35	101,69		
56°	12,57			94,12		
	12,53	10,15		94,24	94,33	
			7,82	95,24		
74,5°	11,49			86,52		
	11,40	9,25		85,89	86,09	
			7,05	85,86		
90°	11,02			83,12		
	10,97	9,00		83,57	83,17	1
			6,80	82,82		
98°	11,13			83,83		
	11,06	9,05		83,99	83,80	
			6,86	83,58		
118,5°	12,12			91,24		
	12,02	10,00		92,85	92,66	
			7,71	93,89		
125°	12,59			94,18		
	12,55	10,35		94,50	94,66	
			7,85	95,30		
143°	13,35			100,73		
	13,30	10,95		101,67	101,97	
			8,50	103,52		
161,5°	13,98			105,61		
	13,96	11,35	8,85	105,38	106,26	
				107,78		
180°	14,36			108,34		
	14,30	11,78		109,36	109,11	1,32
			9,00	109,63		

Die mit Hülfe dieser Werthe auf dieselbe Weise wie Fig. 1 construirte Curve (Fig. 2) gestattet einen Ueberblick über die Elasticitätsverhältnisse des Brachypinakoids. Es herrscht auch hier völlige Symmetrie wie in geometrischer Hinsicht, nach der Axe c sowohl, wie nach der Brachydiagonale a. Die Form der Curve hat einige Aehnlichkeit mit einer Ellipse; der grössere Parameter, also das Minimum der Elasticität für das Brachypinakoid, liegt in der Richtung der Axe a, das Maximum dem entsprechend in der Axe c und zwar ist das Verhältniss der Elasticitätscoëfficienten = 1,32 : 1.

Messungen an der Platte *C*. Basis.

1. Dimensionen.

α) Dicke [gemessen an 17 Punkten], Mittel $h = 0{,}4747$ mm,

β) Durchmesser [Mittel aus 10 Messungen] $r = 7{,}5457$ mm.

2. Die Biegungen sind dann für $l = 4{,}992$ mm mit der Makrodiagonale b als Anfangsrichtung der Biegung folgende:

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,13228kg	= 0,1077kg	0,0821 kg	N [auf 1 kg reduc.]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$, wenn die Biegung in der Verticalaxe $c = 1$ ist
0°	15,59			117,86		
		12,71		117,81	117,90	1,54
			9,69	118,04		
15,25°	14,95			113,33	112,89	
		12,11		112,44		
28,25°	14,52			109,77	109,02	
		11,66		108,27		
39°	13,30			100,55	100,92	
		10,91		101,30		
41°	13,00			98,28	98,17	
		10,56		98,05		
43°	12,99			98,20	98,12	
		10,56		98,05		
45,25°	12,93			97,75	97,76	
		10,53		97,77		
46,25°	12,89			97,44	97,47	
		10,50		97,49		
48°	12,84			97,07	96,96	
		10,43		96,84		
49°	12,79			96,69	96,69	
50,75°	12,78			96,61		
		10,40		96,56	96,58	1,25

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,13228kg	= 0,1077kg	0,0821 kg	N [auf 1kg reduc.]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$, wenn die Biegung in der Verticalaxe $c = 1$ ist
52°	12,80			96,65		
		10,50		97,49	97,22	
54°	12,89			97,44		
		10,50		97,49	97,46	
58,25°	13,15			99,41		
		10,73		99,63	99,52	
67,25°	13,18			99,64		
		10,72		98,58	99,61	
75,75°	13,50			102,05	102,05	
90°	13,69			103,49		
		11,15		103,53	103,51	1,348
100°	13,63			103,04		
		11,15		103,53	103,28	
110,25°	13,24			100,16		
		10,84		100,65	100,40	
122,75°	13,01			98,28	98,28	
130,25°	12,78			96,61		
		10,48		97,30	96,90	1,25
140,75°	13,66			103,26		
		11,15		103,53	103,39	Kleiner Fehler am äussersten Rande der Platte
163°	14,95			113,02		
		12,28		114,00	113,51	
171°	15,32			115,81		
		12,50		116,07	115,95	
180°	15,59			117,86		
		12,71		118,01	117,93	1,54

(Fig. 3.) Die Biegungscurve der Basis zeigt natürlich Symmetrie nach den Axen a und b. Die Elasticität ändert sich ausserdem mit der Richtung. Die beiden grösseren Maxima der Biegung liegen in der Richtung der Axe b, die beiden kleineren in der Richtung der Axe a und zwar ist $\frac{E_{\parallel b}}{E_{\parallel a}} = \frac{1}{1{,}17}$. Ferner liegen vier Minima in den beiden Richtungen, die mit der Axe a einen Winkel von 39,5° bilden. Bezeichnen wir einen Moment den Elasticitätscoëfficienten dieser Richtung mit E_{39a}, so ist $\frac{E_{39a}}{E_a} = 1{,}08$.

Bevor wir auf eine weitere Discussion der Curven eingehen können,

erübrigt es nun noch, mit Hülfe der Stäbchen die absoluten Werthe der Elasticitätscoëfficienten zu bestimmen.

Messungen am Stäbchen *a*. Brachydiagonale.

1. Dimensionen. *α*) Dicke [gemessen an acht Punkten] $h = 0{,}9655$ mm,
β) Breite [gemessen an sechs Punkten] $b = 3{,}0265$ mm.

2. Es ergab sich n_1 für $l = 5{,}987$ mm:

bei *P*				*N* [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth
= 0,1575 kg	= 0,1323 kg	= 0,1077 kg	= 0,0821 kg		
13,56				86,08	
	11,38			86,03	86,14
		9,24		85,80	
		9,23			
			7,13	86,65	
			7,10		

Nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$ berechnet sich daraus $E_a = 6497{,}1$ kg.

Messungen am Stäbchen *b*. Makrodiagonale.

1. Dimensionen. Dicke (gemessen an acht Punkten) $h = 0{,}9656$ mm,
Breite (gemessen an sechs Stellen) $b = 3{,}1512$ mm.

2. Biegungen. Bei $l = 5{,}987$ mm:

bei *P*				*N* [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth
= 0,1575 kg	= 0,1323 kg	= 0,1077 kg	= 0,0821 kg		
15,52				99,00	
	13,18			99,64	100,27
		10,84		100,65	
			8,37	101,91	

Daraus berechnet sich der Elasticitätscoëfficient $E_b = 5383{,}2$ kg.

Messungen am Stäbchen b_1. Makrodiagonale.

1. Dimensionen. Dicke (gemessen an acht Punkten) $h = 0{,}9584$ mm,
Breite (gemessen an sechs Punkten) $b = 3{,}1504$ mm.

2. Biegungen. Bei $l = 5{,}2686$ mm:

bei P = 0,1323 kg	bei P = 0,1077 kg	bei P = 0,08211 kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth
9,12 9,14			69,02	
	7,47 7,58		69,82	69,70
		5,77 5,88	70,27	

Danach ist der Elasticitätscoëfficient in der Richtung der Axe b: $E_{b_1} = 5456{,}6$ kg.

Messungen am Stäbchen *c*. Verticalaxe.

1. Dimensionen. Dicke (gemessen an sechs Punkten) $h = 0{,}9587$ mm.
   Breite (gemessen an sechs Punkten) $b = 3{,}043$ mm.
2. Biegungen. Bei $l = 5{,}987$ mm:

bei P = 0,1323 kg	bei P = 0,1077 kg	bei P = 0,0821 kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth
8,93 8,96			67,62	
	7,08		67,31	67,47
		5,54	67,47	

Der Elasticitätscoëfficient in der Richtung der Verticalaxe ist also $E_c = 8487{,}8$ kg.

Betrachten wir nun die aus den vier Stäbchen erhaltenen Elasticitätscoëfficienten, so ergiebt sich zunächst eine zwar nicht scharfe, doch in Anbetracht der Kürze der Stäbchen wohl genügende Uebereinstimmung der Werthe E_b und E_{b_1}, die Differenz beträgt ca. 1 % der Coëfficienten. Nehmen wir den mittleren Werth als richtig an, so haben wir für die drei Axen folgende Zahlen:

Richtung der Verticalaxe: $E_c = 8487{,}8$ kg,
- - Makrodiagonale: $E_b = 5409{,}4$ -
- - Brachydiagonale: $E_a = 6497{,}1$ -

Daraus berechnen sich folgende Verhältnisse:

$$\frac{E_c}{E_b} = 1{,}569 \qquad \frac{E_c}{E_a} = 1{,}306.$$

Durch Biegung der kreisrunden Platten erhielten wir:

$$\frac{E_c'}{E_b'} = 1{,}55 \text{ und } 1{,}54; \text{ ferner: } \frac{E_c'}{E_a'} = 1{,}32 \text{ und } 1{,}348.$$

Die Uebereinstimmung ist eine solche, dass die weiteren Besprechungen der gegenseitigen Grösse der Elasticitätscoëfficienten ungehindert an den Biegungscurven der drei Symmetrieebenen vorgenommen werden können. Aus den Curven ist ersichtlich, dass in der Richtung der Verticalaxe die grösste Elasticität vorhanden ist, $E_c = 8487$; das zweite Maximum liegt ‖ der Basis, mit der Brachydiagonale einen Winkel von 39° einschliessend. $E_{39a} = 6790{,}4$ kg. Von den beiden anderen Axen zeigt die Richtung der Axe a die grössere ($E_a = 6497{,}1$), die Richtung der Axe b die kleinere Elasticität, $E_b = 5409{,}4$. Das Minimum der Elasticität endlich findet sich ‖ dem Makropinakoid, 38° zu der Axe b geneigt, $E_{\text{min.}} = 4769$ kg.

Anders als mit den Verhältnisszahlen steht es mit den aus der Biegung der kreisförmigen Platten berechneten absoluten Werthen für die Coëfficienten [nach der Beckenkamp'schen Formel]. Die Biegungsvorgänge sind, wie schon oben erwähnt wurde, zu complicirt, als dass auch nur ein Annäherungswerth erhalten werden könnte. So ist z. B. aus Platte B $E_a' = 4824{,}6$; aus Platte A_1 $E_b' = 4108$; aus Platte C $E_a' = 5432$ kg etc. Auf jeden Fall aber kann constatirt werden, dass, wenn es sich um die Bestimmung der Form der Elasticitätsfläche eines Krystalles handelt, die Methode der Biegung kreisförmiger Platten nicht nur eine sehr angenehme und bequeme, sondern auch eine brauchbare ist, indem sie Unterschiede der Elasticität in verschiedenen Richtungen mit genügender Schärfe erkennen lässt.

Im Folgenden sollen nun die Cohäsionsverhältnisse des Baryt noch etwas näher in's Auge gefasst werden, um untersuchen zu können, welche Beziehungen zwischen ihnen und den eben in Bezug auf Elasticität gefundenen Eigenschaften herrschen.

$a : b : c = 0{,}7622 : 1 : 1{,}2416$. Spaltbarkeit nach der Basis {001} vollkommen, nach dem Prisma {110} ziemlich vollkommen, nach dem Brachypinakoid {010} und der Pyramide {111} deutlich*). Vorderer stumpfer Winkel der prismatischen Spaltbarkeit = 78° 20′. Ueber die Härte von Schwerspathkrystallen hat zuerst Frankenheim Beobachtungen angestellt; er schreibt darüber**): »Beim Baryt sind von drei Flächen des stärksten Blätterdurchganges zwei den Flächen des Prismas von 101° 42′ parallel, eine darauf senkrecht. Auf dieser Fläche habe ich die geringste Härte parallel zur kürzeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante gefunden, die grösste Härte hingegen parallel zur längeren Diagonale oder senkrecht auf die abgestutzte scharfe Kante«, und weiter: »An dem Parallelogramm, welches durch einen der Endfläche des Prismas parallelen Schnitt entsteht, findet sich beim schwefelsauren Baryt die grösste

*) P. Groth, Physik. Krystallographie 1885, S. 459.

**) Inaug.-Dissert. Ettingshausen Zeitschr. 1831, S. 99 und weiter S. 105.

Härte in der Richtung der längeren Diagonale, die geringste aber zwischen der kürzeren senkrecht auf die abgestutzte stumpfe Kante und den Normalen«. Die von Exner auf der Basis gefundene Härtecurve zeigt »vier gleich grosse Minima, an denen je zwei parallel den Combinationskanten mit den Prismenflächen liegen, und vier Maxima, unter einander zwei und zwei gleich. Dieselben stehen auf einander senkrecht und fallen so in die Richtung der Diagonalen, dass die kleinere parallel der grossen, die grössere ‖ der kleinen Diagonale zu liegen kommt«. Das Verhältniss vom ersten zum zweiten Maximum = 1,1 : 1 und zum Minimum = 1,257 : 1.

Auf den prismatischen Spaltungsflächen liegen die Minima in den Richtungen parallel und senkrecht zur Kante des Prismas, die Maxima halbiren die Winkel zwischen den Minimis.

Ueber die Gleitflächen resp. die Schlagfiguren finde ich nur eine Angabe in Tschermak's Mineralogie. Derselbe bezeichnet als Schlagfigur auf der Basis die Diagonalen, die Risse sind also {100} und {010} parallel. Ich habe deshalb selbst versucht, auf den drei Symmetrieebenen mit Hülfe des Körners solche Figuren herzustellen und machte dabei folgende Beobachtungen: Auf der Basis entsteht als Schlagfigur fast immer ein Stern mit acht mehr oder weniger vollständig ausgebildeten Strahlen, von denen vier in der Richtung der beiden Diagonalen, also ‖ {100} und {010} liegen. Die vier anderen liegen in den Richtungen der Trace des Spaltungsprismas {110}. Ausserdem zeigen sich fast immer noch Strahlen zwischen denen ⊥ {110} und ‖ {010}, sie verlaufen aber selten geradlinig, ihr Winkel mit der Richtung von a ist somit schwer zu bestimmen, meine Messungen differiren zwischen 17° und 30°; möglicherweise stehen diese Sprünge in Beziehung zu dem von Frankenheim in der Richtung beobachteten Minimum der Härte.

Auf der Fläche des Makropinakoids erhielt ich in der Mehrzahl der Fälle acht Strahlen, von denen vier in den Richtungen der Axen, also parallel {001} und {010} liegen. Dazwischen entstehen vier weitere, deren Richtung mit der Makrodiagonale einen Winkel von 30°—33° einschliesst, also der Trace des Brachydomas {012} entsprechen dürfte, das einen Winkel von 31° 50′ verlangt.

Die parallel dem Brachypinakoid angeschliffene Fläche gestattet in Uebereinstimmung mit den in dazu senkrechter Richtung gefundenen Eigenschaften der Elasticität und der Härte ein, gegenüber den anderen beiden Flächen auffallend leichtes Eindringen des Körners. Infolge dessen ist die Schlagfigur nicht so deutlich, doch lassen sich vier Strahlen in der Richtung der beiden Axen, also ‖ {001} und ‖ {100} mit Sicherheit erkennen.

Hält man diesen Cohäsionsverhältnissen die Beziehungen gegenüber, welche zwischen den Elasticitätscoëfficienten des Baryt in verschiedenen Richtungen bestehen, so lässt sich Folgendes constatiren:

Die Richtung der grössten Elasticität steht senkrecht zur Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit am Krystall. Das zweite Elasticitätsmaximum liegt in der Richtung der Normalen zur ziemlich vollkommenen prismatischen Spaltbarkeit. [Die vorläufige Bezeichnung E_{39a} kann also jetzt in $E \perp \{110\}$ umgeändert werden.] Ebenso zeigt die Richtung senkrecht zur dritten Spaltungsebene, dem Brachypinakoid, eine Einsenkung der Biegungscurve, also ein Wachsen der Elasticität am Makropinakoid. Endlich steht die Richtung des Minimums der Elasticität senkrecht zu den Ebenen des primären Brachydomas {011}, nach denen keine Spaltbarkeit bemerkbar ist. [Verlangter Winkel 38° 51′, also statt $E_{\min.}$ wäre zu setzen $E \perp \{011\}$.] Im Gegentheil scheint es, wenn wir uns, was sehr wahrscheinlich ist, die Härtecurve auf dem Makropinakoid in Beziehung auf Vertheilung der Maxima und Minima ähnlich denken, wie die von Exner auf den Prismenflächen beobachtete, dass in der Richtung des Minimums der Elasticität eher ein Maximum der Cohäsion im Barytkrystall zu suchen sei.

Vergleicht man die elastische Biegungscurve der Basis mit der Exner'schen Härtecurve, so erscheint die eine aus der andern durch eine Drehung um 90° entstanden, d. h. der Biegung in einer beliebigen Richtung entspricht derselbe relative Werth der Härte in der dazu senkrechten Richtung.

Die Schlagfiguren zeigen keine ausserordentlichen Beziehungen zu den Elasticitätsverhältnissen, nur der der Trace von {012} parallele Strahl auf dem Makropinakoid nähert sich stark der Richtung der kleinsten Elasticität ($E \perp \{011\}$).

Um nun zu sehen, ob das Minimum der Cohäsion in der Normalen zu der Spaltungsfläche {111} auch in der Grösse der Elastictiät in dieser Richtung seinen Ausdruck findet, liess ich mir noch eine kreisrunde Platte senkrecht zur Combinationskante des Prismas {110} und der Basis {001}, sowie ein Stäbchen zur Controle schneiden, dessen Längsrichtung $\perp$ zur eben genannten Combinationskante und $\parallel$ der Basis lag.

Von den mit der Platte erhaltenen Messungen will ich der Kürze halber nur einige anführen, die eben von Interesse sind. Folgerichtig müsste also die Biegungscurve in der Richtung der Normalen zu {111}, also unter einem Winkel von 25° 28′ mit der Trace der Basis eine Einsenkung zeigen.

Messungen an der Platte $\perp$ zur horizontalen Prismenkante.

1. Dimensionen. α) Dicke (Mittel aus neun Messungen) $h = 0{,}5514$ mm, β) Durchmesser (Mittel aus elf Messungen) $r = 6{,}7173$ mm.

2. Biegungen. Bei $l = 6{,}172$ und der Richtung der Verticalaxe als Anfangsrichtung der Biegung:

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,1332kg	= 0,1077kg	= 0,0821kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$, wenn die Biegung in der Richtg. der Verticalen = 1 ist
0°	16,25			122,85		
		13,30		122,49	123,08	1
			10,18	123,90		
13°	17,50			132,30		
		14,17		131,56	131,95	
47°	23,45			177,26		
		19,19		178,17	177,71	1,45 Biegungsmaximum
65°	21,83			165,03		
		17,68		164,15	165,34	Richtung ⊥ zu {111}
			13,70	166,85		
90°	19,42			146,84		
		15,83		147,01	147,06	1,20
			12,09	147,35		
115°	21,80			164,80		
		17,68		164,15	164,47	
137,5°	23,20			175,63		
		19,00		176,41	176,02	
180°	16,25			122,85		
		13,30		122,49	123,08	1
			10,18	123,90		

Die Curve Fig. 4 zeigt nun keine Einsenkung nach der Richtung der Normalen zu {111}, indessen kann das auch daran liegen, dass die Lage der Fläche {111} zu steil, d. h. von der Richtung der viel vollkommeneren Spaltbarkeit {110} zu wenig verschieden ist, um neben ihr einen Einfluss auf die Form der Curve geltend machen zu können. Im Uebrigen bestätigt auch diese Curve den Satz, dass die Elasticitätsverhältnisse des Baryt sich dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie unterordnen.

Messungen am Stäbchen, dessen Längsrichtung ∥ {001} und ⊥ {110}.

1. Dimensionen. *α*) Dicke (Mittel aus zwölf Messungen) $h = 0{,}7157$ mm,
β) Breite (Mittel aus sechs Messungen) $b = 3{,}3475$ mm.

2. Biegungen. Für $l = 5{,}3096$ mm:

n_1 für P = 0,13228 kg	= 0,1077 kg	= 0,0821 kg	N [reducirt auf 1 kg]	Mittelwerth	Daraus berechnet
15,72			118,84		$E_g = 7063{,}8$
	12,89		119,96	120,40	$\frac{E_c}{E_g} = 1{,}21$
		10,03	122,40		

Aus diesen letzten Messungen geht hervor, dass das Elasticitätsmaximum auf der Basis bei Biegung der Platte *C* nicht ganz gross genug resp. die Biegung etwas zu gross erscheint; dort war die Verhältnisszahl = 1,25.

Eine wünschenswerthe Controle und Vervollständigung der Messungen lieferte endlich noch eine Platte, welche parallel der Axe *c* und zum Makropinakoid unter einem Winkel von 20° 27′ geneigt war, also zwischen diesem und der zuletzt aufgeführten Platte (⊥ der Prismenfläche) lag. Sie heisse *F*.

Messungen an der Platte *F*.

1. Dimensionen. *α*) Dicke [gemessen an 17 Punkten] Mittel $h = 0{,}5055$ mm,
   β) Durchmesser [Mittel aus 10 Messungen] $r = 17{,}197$ mm.
2. Bei dem halben Lagerabstand $l = 7{,}500$ mm wurden folgende Biegungen beobachtet, wenn die Richtung der Basis mit 0° bezeichnet ist.

Winkel mit der Anfangsrichtung	n_1 bei P = 0,1332 kg	n_1 bei P = 0,1077 kg	N [auf 1 kg reducirt]	Mittelwerth	Verhältnisszahl nach Abzug von $n_2 = 2{,}24$, wenn die Biegung in der Verticalen = 1 ist
0°	35,10		265,35	265,12	1,31
		28,53	264,9		
10,5°	37,88		286,36	285,48	
		30,65	284,59		
21,5°	39,8		300,89	299,70	
		32,15	298,51		
41,5°	43,01		325,15	325,06	1,60
		35,00	324,97		
45,5°	42,79	—			Maximum d. Biegung
62°	35,00		264,59	266,80	
		28,97	269,01		
74,5°	30,50		230,57	231,35	
		25,00	232,13		
90°	26,91		203,44	203,63	1
		21,95	203,81		
97,5°	28,14		212,74	213,65	
		23,11	214,56		
118,5°	35,67		269,65	271,82	
		29,51	274,00		
138,5°	43,00		325,15	325,06	1,60
		35,01	324,97		
147,5°	41,50		313,74	315,32	
		34,13	316,90		
163°	37,00		279,72	280,44	
		30,28	281,15		
177,5°	35,35		267,24	267,33	1,31
		28,88	267,41		

Auf der diesen Werthen entsprechenden Biegungscurve (Fig. 5) sind Maxima und Minima im selben Sinne vertheilt, wie beim Makropinakoid. Die in der Richtung der Basis gefundene Verhältnisszahl entspricht nicht ganz genau der bei der Basis für diese Richtung gefundenen; dieselbe war 1,40. Die Symmetrie ist auch bei der letzten Curve nach der horizontalen und verticalen Axe vollständig. Das Maximum der Biegung liegt 41,5° zur Basis geneigt.

Theoretische Speculationen über die Cohäsionsverhältnisse und ihre Beziehungen zur Elasticität im Allgemeinen anzustellen, scheint, beim jetzigen Stande der Kenntnisse, noch verfrüht.

Vorstehende Arbeit wurde, auf Veranlassung einer von der philosophischen Facultät gestellten Preisfrage, im mineralogischen Laboratorium der Akademie der Wissenschaften in München ausgeführt.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Fig. 1.

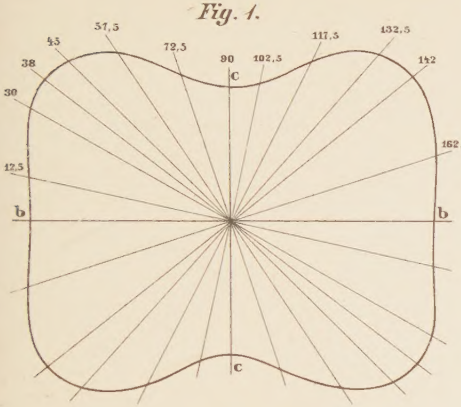


Fig. 2.

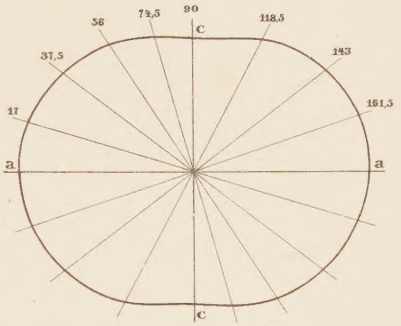


Fig. 3.

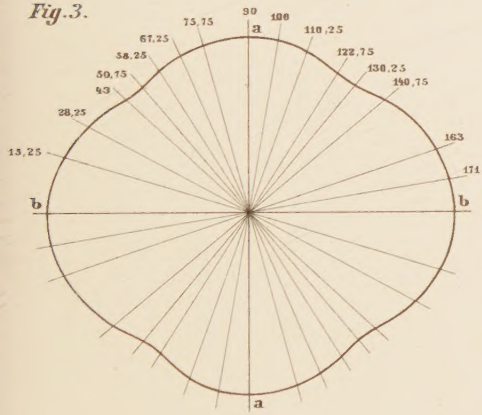


Fig. 4.

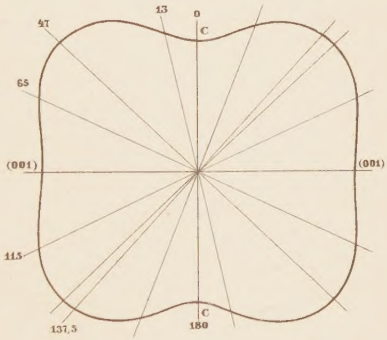


Fig. 5.

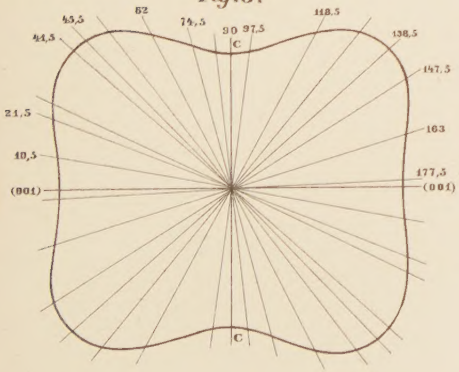
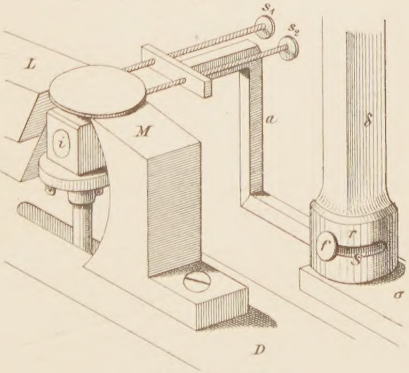


Fig. 6.



½ natürliche Grösse.

H. Niedmann. del.

Lith. Robert Köhler München.